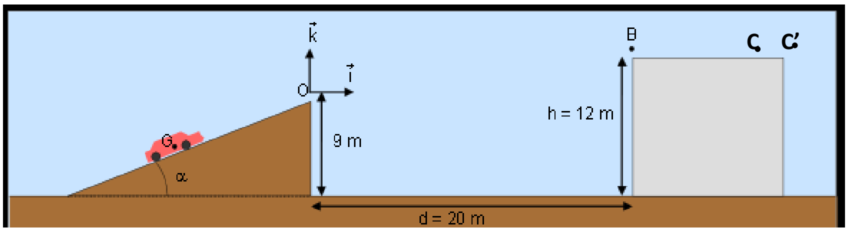
Date :

DM18 : Etude de mouvements plans - Correction

Un cascadeur doit sauter avec sa voiture sur la terrasse d'un immeuble. Pour cela, il utilise un tremplin distant d'une distance d = 20 m de l'immeuble et faisant un angle α avec l'horizontale. Ma masse du système {voiture + cascadeur} est m = 900 kg.

Etant un ancien élève de terminale S du lycée de Tarare, ce cascadeur va essayer d'utiliser ses vieux souvenirs de mécanique pour réussir sa cascade.



Première partie : Etude du mouvement entre les points O et B.

On considère que :

- Le saut commence lorsque le centre d'inertie G de l'ensemble {voiture + cascadeur} est en O.
- A l'instant où les roues de la voiture touchent la terrasse, le centre d'inertie G est en B.
- A t = 0, Le centre d'inertie G coïncide avec l'origine du repère.

1) En considérant que les forces de frottement de l'air sont négligeables, établir les équations horaires paramétriques x(t) et z(t) du mouvement du centre d'inertie G du système {voiture + cascadeur} entre les positions O et B.

La seule force s'exerçant sur le système {voiture + cascadeur} est son poids puisque les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sont négligeables.

Appliquons alors la deuxième loi de Newton :

$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}$ = m. $\overrightarrow{a_G}$

$\vec{P}$ = m. $\overrightarrow{a_G}$

Projetons la relation $\vec{P}$ = m. $\overrightarrow{a_G}$ dans le repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{k}$) :

Selon (O,$\vec{\imath}$), on a : 0 = m.a_x

Selon (O,$\vec{k}$), on a : - m.g = m.a_z soit -g = a_z

Or, par définition, $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$

D'où :

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2Z}{dt^2} = -g$$

Etablissement des équations différentielles :

On choisit les conditions initiales suivantes :

A t=0 : X = 0 ; Y = 0 ; Z = 0

Et $\vec{V}(t=0) = \vec{V}_0 \begin{pmatrix} V_0.\cos(\alpha) \\ V_0.\sin(\alpha) \end{pmatrix}$

a) Selon $\vec{i}$:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$$

D'où

$V_x = C$ avec C une constante

Or à t = 0 ; $V_x = V_0.\cos(\alpha)$

D'où

$$V_x = V_0.\cos(\alpha) = \frac{dX}{dt}$$

Ainsi

$X = V_0.\cos(\alpha).t + C_2$ avec C_2 une constante.

Or à t = 0 ; X = 0 = C_2

D'où $X = V_0.\cos(\alpha).t$ pour tout t

b) Selon $\vec{k}$:

$$\frac{dV_Z}{dt} = \frac{d^2Z}{dt^2} = -g$$

$V_z = -g.t + C_3$ avec C_3 une constante.

Or à t = 0 ; $V_z = V_0.\sin(\alpha) = C_3$

D'où $V_z = -g.t + V_0.\sin(\alpha) = \frac{dZ}{dt}$

Ainsi

$Z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\alpha).t + C_4$ avec C_4 une constante.

Or à t = 0 ; Z = 0 = C_4

D'où $Z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\alpha).t$

On obtient donc les équations paramétriques suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} X = V_0.\cos(\alpha).t \\ Z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin(\alpha).t \end{array}}$$

2) Etablir alors l'équation cartésienne z = f(x) de la trajectoire à partir du point O du centre d'inertie G.

On observe que

$$X = V_0.\cos(\alpha).t \Leftrightarrow t = \frac{X}{V_0.\cos(\alpha)}$$

En remplaçant dans l'expression de Z :

$$Z = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{X}{V_0.\cos(\alpha)}\right)^2 + V_0.\sin(\alpha).\frac{X}{V_0.\cos(\alpha)}$$

$$Z = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{X}{V_0.\cos(\alpha)}\right)^2 + X.\tan(\alpha)$$

$$Z = -\frac{g}{2.(V_0.\cos(\alpha))^2}X^2 + \tan(\alpha).X$$

Remarques :
L'équation de la trajectoire est une équation du type : $Z = a.X^2 + b.X + c$, c'est une **parabole**.

3) Le cascadeur souhaite atteindre la terrasse avec une vitesse horizontale. Avec quel point particulier de la trajectoire doit alors coïncider le point B ?

Le point B doit alors coïncider avec le sommet de la trajectoire car à cet instant, la composante v_z de la vitesse s'annule (puisque z atteint son maximum : la vitesse est donc réduite à sa composante horizontale.

4) Exprimer les coordonnées du sommet S de la trajectoire de G en fonction de α et V_0.

Il faut donc chercher l'instant t_1 pour lequel $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$

Soit : $- g.t + V_0.\sin\alpha = 0$ c'est-à-dire à l'instant $t_1 = \frac{V_0.\sin\alpha}{g}$

Le sommet S de la trajectoire a alors pour coordonnées :

$x_S = V_0.\cos\alpha.t_1$

$x_S = V_0.\cos\alpha.\frac{V_0.\sin\alpha}{g}$

$x_S = \frac{V_0^2}{g}.\sin\alpha.\cos\alpha$

$x_S = \frac{V_0^2}{g}.\sin(2\alpha)$

$z_S = -\frac{1}{2}.g.t_1^2 + V_0.\sin\alpha.t_1$

$z_S = -\frac{1}{2}.g.(\frac{V_0.\sin\alpha}{g})^2 + V_0.\sin\alpha.\frac{V_0.\sin\alpha}{g}$

$z_S = -\frac{1}{2}.\frac{(V_0.\sin\alpha)^2}{g} + \frac{(V_0.\sin\alpha)^2}{g}$

$z_S = \frac{1}{2}.\frac{(V_0.\sin\alpha)^2}{g}$

5) A quelles conditions portant sur α et V_0 le sommet de la trajectoire coïncide-t-il avec le point B. La valeur de V_0 devra être exprimée en $m.s^{-1}$ puis en $km.h^{-1}$.

D'après l'énoncé, on connaît les coordonnées du point B : $x_B = d = 20$ m et $z_B = h-h_0 = 3,0$ m

Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} x_S = x_B \\ z_S = z_B \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{V_0^2}{g}.\sin\alpha.\cos\alpha = 20 \\ \frac{1}{2}.\frac{(V_0.\sin\alpha)^2}{g} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6,0\,g}{(\sin\alpha)^2.g}.\sin\alpha.\cos\alpha = 20 \\ V_0 = \frac{\sqrt{6,0.g}}{\sin\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{20}{6,0} \\ V_0 = \frac{\sqrt{6,0.g}}{\sin\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\alpha = \frac{6,0}{20} = 0,30 \\ V_0 = \frac{\sqrt{6,0.9,81}}{\sin 17} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 17°} \\ \boldsymbol{V_0 = 27\ m.s^{-1}} \end{cases}$$

Conversion de la vitesse :

$V_0 = 27\ m.s^{-1}$

$V_0 = 27.10^{-3}.3600 =$ **96 km.h^{-1}**

Deuxième partie : Etude du mouvement entre les points B et C

Arrivé au point B (d'abscisse $x_B = 20$ m), le cascadeur devra alors freiner pour s'arrêter avant d'avoir atteint l'extrémité de la terrasse de l'immeuble dont la largeur de la terrasse est d' = 13 m.

Pour des raisons de sécurité, la voiture doit s'arrêter avant le point critique C situé à 10 m du point B : ainsi on cherche les conditions pour lesquelles la composante horizontale de la vitesse devient nulle au point C.

On considère que :

- Les frottements de l'air sont négligeables.
- La nouvelle origine des dates est choisie telle que à t=0, le centre d'inertie G est en B.
- A la date t= 0, le vecteur vitesse est horizontal et a pour valeur $V'_0 = 25,6\ m.s^{-1}$

6) Faire un bilan des forces s'appliquant au système entre les points B et C.

Les forces s'exerçant sur le système {voiture + cascadeur} sont :

- le poids $\vec{P}$,
- la réaction du support plan R qui peut être décomposée entre réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ et réaction tangentielle ou forces de frottement $\vec{f}$.

7) Que peut-on dire de la valeur de a_Z entre ces deux points ?

La valeur de a_Z entre les points B et C est nulle puisqu'il n'y a pas de mouvement selon l'axe $(O,\vec{k})$.

8) En appliquant la deuxième loi de Newton, en déduire l'intensité R_N de la composante normale de la réaction du support plan.

D'après la 2ème loi de Newton,

$\Sigma\, \overrightarrow{F_{ext}} = m.\,\overrightarrow{a_G}$

$\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = m.\,\overrightarrow{a_G}$

Projetons cette relation dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{k})$:

Selon $(O,\vec{\imath})$, on a : $- f = m.a_x$

Selon $(O,\vec{k})$, on a : $- P + R_N = m.a_z$ soit $- m.g + R_N = 0$ soit $R_N = m.g$

9) On considère que pendant toute la phase de freinage, la composante tangentielle de la réaction du support a une intensité constante f.

a. En appliquant la deuxième loi de Newton sur l'axe $(O\vec{\imath})$, exprimer v_x et x en fonction du temps.

Selon $(O,\vec{\imath})$, on a : $- f = m.a_x$

$- f = m\,.\frac{dv_x}{dt}$ soit $\frac{dv_x}{dt} = \frac{-f}{m}$

Ainsi, $\boxed{v_x = \frac{-f}{m}\,.\,t + V'_0}$

Or, $v_x = \frac{dx}{dt}$

Ainsi, $x = -\frac{1}{2}.\frac{f}{m}.\,t^2 + V'_0.t + X_0$

Or, on a choisi $X_0 = 0$ soit $\boxed{x = -\frac{1}{2}.\frac{f}{m}.\,t^2 + V'_0.t}$

b. En déduire la date t_1 à laquelle la vitesse v_X s'annule.

$v_x = 0$ donc $-\frac{1}{2}.\frac{f}{m}.\,t_1 + V'_0 = 0$ soit $\boxed{t_1 = V'_0\,.\,\frac{m}{f}}$

c. A partir de l'équation x(t), montrer alors que la force de frottement s'exprime : $f = \frac{m.V_0'^2}{20}$

On cherche les conditions pour lesquelles la composante horizontale de la vitesse devient nulle au point C, soit pour $x(t_1) = xC = 10$ m

$-\frac{1}{2}.\frac{f}{m}.\,t_1^{\,2} + V'_0.\,t_1 = 10$

$-\frac{1}{2}.\frac{f}{m}\,.\,(V'_0\,.\frac{m}{f})^2 + V'_0.\,V'_0\,.\frac{m}{f} = 10$

$\frac{1}{2}.m.\,V_0'^2\,.\frac{1}{f} = 10$

$f = \frac{m.V_0'^2}{20}$

d. Calculer la valeur de cette force de frottement.

$f = \frac{m.V_0'^2}{20}$

$f = \frac{900.25,6^2}{20} = 2,9.10^4$ N

e. N'étant pas tout-à-fait sûr de ses calculs, le cascadeur se souvient qu'il a vu une autre méthode pour déterminer l'intensité de cette force de frottement en classe de première : il s'agit du théorème de l'énergie cinétique. En appliquant ce théorème entre les points B et C, exprimer puis calculer la valeur de f. Comparer cette valeur à la valeur précédente.

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les points B et C, la variation de l'énergie cinétique du système entre les points B et C est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées au système entre ces deux points, soit :

$Ec_C - Ec_B = \sum W_{BC}\,\overrightarrow{F_{ext}} = W_{BC}\,(\vec{P}) + W_{BC}\,(\overrightarrow{R_N}) + W_{BC}\,(\vec{f})$

Or, $W_{BC}\,(\vec{P}) = 0$ et $W_{BC}\,(\overrightarrow{R_N}) = 0$ puisque les vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$ sont perpendiculaires au déplacement entre les points B et C.

D'autre part $Ec_C = 0$ puisque la vitesse au point C est nulle.

On en déduit donc que : $-Ec_B = W_{BC}\,(\vec{f})$

$-\frac{1}{2}\,.\,m\,.v_B^2 = -f.\,BC$

Soit $f = \frac{m.V_B{}^2}{2BC} = \frac{m.V_0'^2}{20}$ **f = 2,9.10^4 N**

On retrouve la même valeur que précédemment.

Troisième partie : Etude du mouvement après le point C….

On considère ici le cas où le malheureux cascadeur ne réussirait pas à s'arrêter avant le point C. Il tomberait alors en chute libre à partir du point C' situé à l'aplomb de la terrasse.

10) Etablir les équations paramétriques du mouvement à partir du point C' (en considérant qu'en ce point, la vitesse est nulle).

La seule force s'exerçant sur le système {voiture + cascadeur} est son poids puisqu'il tombe en chute libre.
Appliquons alors la deuxième loi de Newton :
$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\,\overrightarrow{a_G}$
$\vec{P} = m.\,\overrightarrow{a_G}$

Projetons la relation $\vec{P} = m.\,\overrightarrow{a_G}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{k})$:
Selon $(O,\vec{\imath})$, on a : $0 = m.a_x$
Selon $(O,\vec{k})$, on a : $-m.g = m.a_z$ soit $-g = a_z$

Or, par définition, $\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$

D'où :

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2Z}{dt^2} = -g$$

Etablissement des équations différentielles :
On choisit les conditions initiales suivantes :
A t=0 : X = 0 ; Y = 0 ; Z = 0
Et $\vec{V}(t=0) = \vec{0}$

a) Selon $\vec{i}$:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$$

D'où
$V_x = C$ avec C une constante
Or à t = 0 ; $V_x = 0$
D'où

$$V_x = 0 = \frac{dX}{dt}$$

Ainsi
$X = C_2$ avec C_2 une constante.
Or à t = 0 ; X = 33 = C_2 (On considère ici que le point C' est la nouvelle origine du repère.
D'où $X = 33$ pour tout t

b) Selon $\vec{k}$:

$$\frac{dV_Z}{dt} = \frac{d^2Z}{dt^2} = -g$$

$V_z = -g.t + C_3$ avec C_3 une constante.
Or à t = 0 ; $V_z = 0 = C_3$

D'où $V_z = -g.t = \frac{dZ}{dt}$

Ainsi

$Z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + C_4$ avec C_4 une constante.

Or à t = 0 ; Z = 12 = C_4

D'où $Z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + 12$

On obtient donc les équations paramétriques suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} X &= 33 \\ Z &= -\frac{1}{2}.g.t^2 + 12 \end{aligned}}$$

On a un mouvement selon une seule direction : l'axe vertical.

11) En déduire la date t_2 à laquelle la voiture toucherait le sol (Pour simplifier, on considère alors que z_G = 0m).

$z_G = 0\text{m}$

$-\frac{1}{2}.g.t_2{}^2 + 12 = 0$

$t_2 = \sqrt{\frac{24}{g}} = 1{,}6$ s

12) Déterminer alors la norme de la vitesse à cette date t_2.

$v(t_2)$ = - $g.t_2$ = - 9,81 . 1,6 = **16 $m.s^{-1}$**

13) Retrouver la valeur de cette vitesse en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points C' et D :

$Ec_D - Ec_{C'} = W_{C'D}(\vec{P})$

Or, $W_{CC'}(\vec{P})$ = m.g.h et

D'autre part $Ec_{C'}$ = 0 puisque la vitesse au point C' est nulle.

On en déduit donc que : $Ec_D = W_{C'D}(\vec{P})$

$\frac{1}{2}.m.v_D{}^2 = m.g.h$

Soit $v_D = \sqrt{2.g.h}$

$v_D = \sqrt{2.9{,}81.12}$

v_D = 15 $m.s^{-1}$

On observe que **v_D = $v(t_2)$**